RAPPEL 1er semestre :

$$(10)_{\underbrace{10}_{\text{base}}} = (1010)_2$$

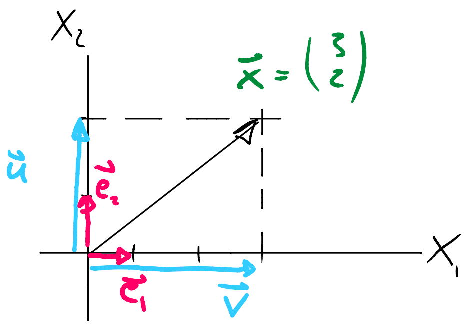
$$0\cdot10^0 + 1\cdot10^1 = 0\cdot2^0 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^3$$

Notion BASE !

Dans un *"espace vectoriel"* (plan $\mathbb{R}^2$ - notion algébrique qui nous assure que tout se passe bien avec l'addition, la multiplication par un scalaire, ..., ...) il existe aussi cette notion de "base" et donc d'écriture dans une certaine base.

NOMBRE : base par défaut est la base 10. Si on ne précise pas la base, on part du principe qu'on travaille en base 10 !!

Pour $\mathbb{R}^2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



$\vec{u} + \vec{v} = \vec{x} \neq 3\cdot\vec{u} + 2\vec{v}$ $\qquad B = \{\vec{v}, \vec{u}\}$

$= 3\cdot\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_E$ Dans la base $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

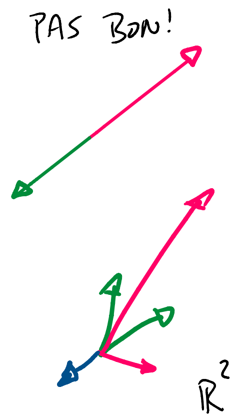
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = 1\cdot\vec{v} + 1\cdot\vec{u}$

BASE "Génératrice" de $\mathbb{R}^N$ est un ensemble de vecteurs permettant d'exprimer N'IMPORTE quel vecteur de $\mathbb{R}^N$

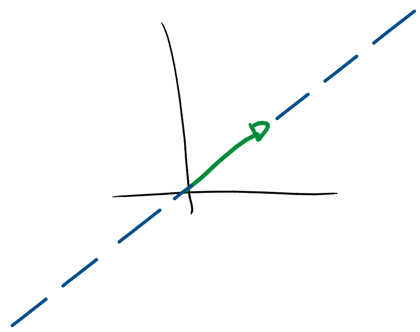
permettant d'exprimer N'IMPORTE quel vecteur de $\mathbb{R}^N$ comme une COMBINAISON LINEAIRE de vecteurs de la base.

$$\mathcal{B} = \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_K \} \quad \text{où } \vec{b}_i \in \mathbb{R}^N$$

Conditions pour que l'ensemble de vecteurs soit effectivement une base génératrice :



1. Il y a notion de "dépendance linéaire" : s'ils sont colinéaires, ils sont sur la même "droite", et donc, ils ne permettront pas de "générer" des vecteurs dans une autre dimension
2. C'est possible d'avoir PLUS que N vecteurs de base (K > N)
3. Il faut AU MOINS N vecteurs linéairement indépendants dans la base B !



Une base pour $\mathbb{R}^N$ doit avoir AU MOINS N vecteurs linéairement indépendants !

On dira que la base contient une FAMILLE LIBRE (liné. Indépendant) de N vecteurs.

Définition : une FAMILLE LIBRE est un ensemble de vecteurs tels que AUCUN des vecteurs de la famille ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Propriétés :

Propriétés :

1. Une famille libre dans $\mathbb{R}^N$ ne peut avoir au plus que N vecteurs.
2. Une base CONTIENT forcément une famille libre composée de N vecteurs.

Une BASE de $\mathbb{R}^N$ contenant EXACTEMENT N vecteurs est appelée une BASE MINIMALE.

La base "canonique" est la base "standard"

$$\mathbb{R}^2 \Rightarrow E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathbb{R}^3 \Rightarrow E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\vdots$

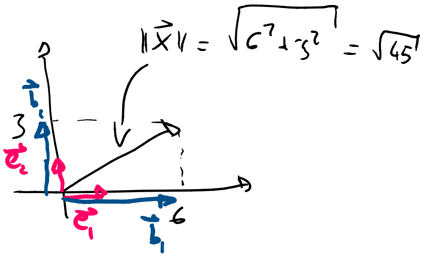
$$\mathbb{R}^N \Rightarrow E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$ où la $i^{\text{ème}}$ ligne du vecteur $\vec{e}_i$ vaut 1 tous les autres valent 0 !

Exercice : que vaut $\vec{e}_7$ dans $\mathbb{R}^9$

$$\vec{e}_7 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}_E = 6 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2$$



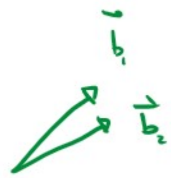
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{6^2 + 3^2}$$

$\vec{b}_1$ $\vec{b}_2$

$$\|\vec{x}\| = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_B = 1\cdot\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \|\vec{x}\| \neq \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ ?$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{45} \neq \sqrt{2}$$



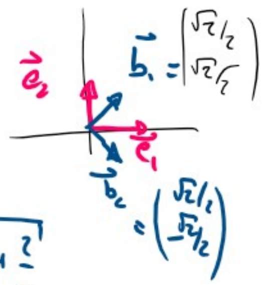
Pythagore ne s'applique plus pour calculer la norme !!!!

Quelles sont le propriétés spéciales de la base canonique :

- C'est une base MINIMALE,
- Ils sont tous à ANGLE DROIT (orthogonaux),
- Tous les vecteurs ont norme 1 !

Si ces 3 conditions s'appliquent, on appelle la base une base *ORTHONORMÉE*.

$$\|\vec{e}_i\| = \sqrt{0^2+0^2+\dots+\underbrace{1^2}_{i^{\text{ème}}}+0^2+\dots+0^2} = \sqrt{1^2} = 1$$



$$\|\vec{b}_1\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}$$

$$= \sqrt{1} = 1 \ \checkmark$$

Notation dans une base :

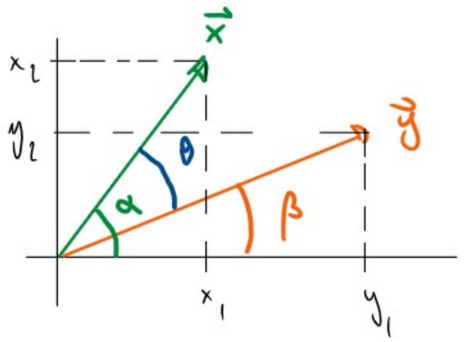
$$\vec{x} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \vdots\\ \lambda_N\end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_N\end{pmatrix}_B$$

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda\vec{e} \quad \dots$$

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda \vec{e}_N = \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2 + \dots + \mu_k \vec{b}_k$$

$\boxed{⚠ \ k \geq N}$

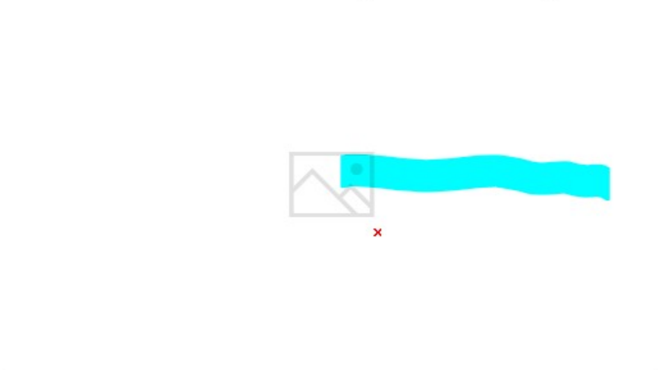
Comment calculer l'angle entre 2 vecteurs :



$$\cos(\alpha) = \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} \qquad \cos(\beta) = \frac{y_1}{\|\vec{y}\|}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{x_2}{\|\vec{x}\|} \qquad \sin(\beta) = \frac{y_2}{\|\vec{y}\|}$$

C.F. LA BIBLE ROUGE (table CRM)



$$\cos(\theta) = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$= \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} \cdot \frac{y_1}{\|\vec{y}\|} + \frac{x_2}{\|\vec{x}\|} \cdot \frac{y_2}{\|\vec{y}\|} = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

$$\boxed{\theta = \operatorname{Arcos}\left(\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \right)}$$

⚠ $\vec{x}$ et $\vec{y} \neq \vec{0}$

Si $\vec{x} \perp \vec{y}$ (perpendiculaires) $\cos(\pm 90°) = \cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$

Comme $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ne sont pas $\vec{0}$ $\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| > 0$!

$\Rightarrow \boxed{x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0}$ alors $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux !

Si l'angle est de $\theta = 0°$ ou $180°$ $(0, \pi)$

$\cos(\theta) = \pm 1 \Rightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 = \pm \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Pour vérifier si les deux vecteurs sont colinéaires, il suffit de vérifier si $x_1 y_1 + x_2 y_2 = \pm \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Définition : **PRODUIT SCALAIRE**

Pour deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans R^2 on définit le produit scalaire des deux vecteurs comme l'opérateur suivant

$$\langle \, , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})$$

Dans $\mathbb{R}^N$ $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_N y_N = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$

$$\boxed{\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}\right)}$$

$\left(\|x\| \cdot \|y\| \right)$

Opérateur	Notation	Paramètres	Résultat
Addition de vecteurs	$\vec{x} + \vec{y}$	$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$	$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}$
Multiplication par un scalaire	$\lambda \vec{x}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$	$\lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$
Produit Scalaire	$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$	$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$	$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

A se souvenir : le produit scalaire est indicateur sur l'angle entre les deux vecteurs !

Si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow$ $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont à angle droit (orthogonaux)

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \pm \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \Rightarrow$ ils sont COLINÉAIRES

$$\hookrightarrow \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \pm 1$$